

Previously on Beligiannis

→ Κάθε μετάθεση σε S_n μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο ζένων κύκλων.

→ Αν $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k$ (γινόμενο ζένων κύκλων), τότε:

$$\alpha(\sigma) = [o(\sigma_1), o(\sigma_2), \dots, o(\sigma_k)]$$

Αν $l(\sigma) \equiv l_i = \text{μήκος του κύκλου } \sigma_i$, και $\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n$ κύκλοι μήκους 1, τότε μπορούμε να γράψουμε

$1, \dots, 1, l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_k$, και τότε η ακολουθία
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $l(\sigma_{k+1}) \quad l(\sigma_m)$
 των αριθμών $1, \dots, 1, l_1, \dots, l_k$ καλείται κυκλικός τύπος της σ .

• Δύο μεταθέσεις $\sigma, \tau \in S_n$ είναι συζυγείς, δηλ.:

$\exists \rho \in S_n : \rho \cdot \sigma \cdot \rho^{-1} = \tau$ αν-ν: οι σ, τ έχουν τον ίδιο κυκλικό τύπο

• Κάθε μετάθεση στην S_n μπορεί να γραφεί ως γινόμενο αντιμεταθέσεων

$$[(a_1 a_2 \dots a_k) = (a_1 a_k)(a_1 a_{k-1}) \dots (a_1 a_2)]$$

{ γινόμενο $k-1$ αντιμεταθέσεων }

Η παραπάνω γραφή δεν είναι μοναδική!

NO:

Date:

Θεώρημα: Αν $\sigma \in S_n$ και $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k$ { Ανάκληση ως
 $= \tau_1 \tau_2 \dots \tau_l$ χινομένο αντι-
 μεταθέσεων
 τότε:

k : άρτιος (αντι-περιττός) $\Leftrightarrow l$: άρτιος (αυτ. περιττός)

Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $\sigma \in S_n$

$$\text{Έστω } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow A_1 \\ \rightarrow A_2 \\ \\ \rightarrow A_n \end{matrix}$$

Ορίσαμε ένα νέο πίνακα $(A\sigma)_i = A_{\sigma(i)}$

$\downarrow$ $\downarrow$
 Η i -οστή $\quad$ Η $\sigma(i)$ γραφή
 γραφή του $A\sigma$ $\quad$ του A

Πχ: Αν $n=3$ και $\sigma = (1 \ 2 \ 3)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow A_1 \\ \rightarrow A_2 \\ \rightarrow A_3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \sigma(1)=2 \\ \sigma(2)=3 \\ \sigma(3)=1 \end{matrix} \Rightarrow A\sigma = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ιδιότητες: Αν $\sigma, \tau \in S_n$, τότε:

$(A\sigma)\tau = (A\sigma\tau)$ και $A\bar{i} = A$, όπου $\bar{i}$: ταυτοτική μετάθεση
 $\forall k=1, 2, \dots, n$

$$[(A\sigma)\tau]_k = (A\sigma)\tau(k) = (A\sigma(\tau(k))) = (A\sigma\tau)_k \Rightarrow (A\sigma)\tau = A\sigma\tau$$

Παρατήρηση: Αν $\sigma = (ij)$ {αντιμετάθεση}, τότε

$$\det A\sigma \text{ και } \det A, \text{ ισχύει: } |A\sigma| = -|A|$$

Απόδειξη (του θεωρήματος): Έστω $\sigma \in S_n$ και

$$\sigma = i_1 i_2 \dots i_{2k}, \text{ όπου } i_i = \text{αντιμετάθεση}, 1 \leq i \leq 2k$$

$$\sigma = v_1 v_2 \dots v_{2\lambda+1}, \text{ όπου } v_j = -1, 1 \leq j \leq 2\lambda+1$$

Θεωρούμε τον μοναδιαίο πίνακα I_n

$$\begin{aligned} |(I_n)\sigma| &= |(I_n) i_1 i_2 \dots i_{2k}| = -|(I_n) i_1 i_2 \dots i_{2k-1}| = \dots \\ &= (-1)^{2k} |I_n| = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(I_n)\sigma| &= |(I_n) v_1 v_2 \dots v_{2\lambda+1}| = -|(I_n) v_1 v_2 \dots v_{2\lambda}| = \dots \\ &= (-1)^{2\lambda+1} |I_n| = -1 \end{aligned}$$

Απονο. Άρα σε μπορεί μια μετάθεση να γραφεί ταυτόχρονα ως γινόμενο άρτιου και περιττού πλήθους αντιμεταθέσεων.

Ορισμός: Μια μετάθεση $\sigma \in S_n$ καλείται άρτια (αντ. περιττή) αν-ν η σ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο άρτιου (αντ. περιττού) πλήθους αντιμεταθέσεων

NO:

Date:

Παράδειγμα: ① Αν $n=1 \Rightarrow S_1 = \{i\}$ και η i θεωρείται άρτια μετάθεση

② Αν $n \geq 2$, τότε $i = (12)(12) \Rightarrow i$: άρτια

③ Έστω $\sigma = (a_1 a_2 \dots a_k)$: κύκλος μήκους k , τότε:

i) σ : άρτια $\Leftrightarrow k$: περιττός, ii) σ : περιττή $\Leftrightarrow k$: άρτιος

$$\textcircled{4} \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 6 & 1 & 5 & 9 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = (16)(275)(3948) = (16)(25)(27)(38)(34)(39)$$

Είναι άρτια η μετάθεση σ

$$\tau = (1724)(369) = (14)(12)(17)(39)(36)$$

Είναι περιττή η μετάθεση τ

Ορισμός: Η απεικόνιση $\varepsilon: \{S_n \rightarrow \{1, -1\}\}$

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \sigma: \text{άρτια} \\ -1, & \text{αν } \sigma: \text{περιττή} \end{cases}$$

Η απεικόνιση καλείται απεικόνιση προσήπου της $S(n)$ και η $\varepsilon(\sigma)$ είναι το πρόσημο της σ

$$\text{Το σύνολο } A_n = \{\sigma \in S_n \mid \sigma: \text{άρτια}\} = \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}$$

Είναι το σύνολο των άρτιων μεταθέσεων της S_n .

NO:

Date:

Λήμμα: Η απεικόνιση προσήλου $\varepsilon: S_n \rightarrow \{1, -1\}$ είναι ομομορφισμός ομάδων.

Απόδειξη: $\emptyset \subseteq S_0 \quad \forall \sigma, \tau \in S_n: \varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$

•	ΑΡΤΙΑ	ΠΕΡΙΤΤΗ
ΑΡΤΙΑ	ΑΡΤΙΑ	ΠΕΡΙΤΤΗ
ΠΕΡΙΤΤΗ	ΠΕΡΙΤΤΗ	ΑΡΤΙΑ

① $\sigma, \tau: \text{άρτιες} \Rightarrow \sigma = \mid_1 \mid_2 \dots \mid_{2k}, \text{όπου } \mid_i: \text{αντιμετάθεση}, 1 \leq i \leq 2k$
 $\tau = v_1 v_2 \dots v_{2l}$
 $v_j: \text{αντιμετάθεση}, 1 \leq j \leq 2l$

Τότε: $\sigma \cdot \tau = \mid_1 \mid_2 \dots \mid_{2k} v_1 v_2 \dots v_{2l}$

Άρτιο πλήθος $(2k + 2l)$ αντιμεταθέσεων
 Συνεπώς $\sigma \cdot \tau \rightarrow \underline{\text{άρτια}}$

② $\sigma: \text{άρτια} \left\{ \begin{array}{l} \text{Τότε: } \sigma = \mid_1 \mid_2 \dots \mid_{2k} \\ \tau: \text{περιττή} \end{array} \right. \Rightarrow \sigma\tau = \mid_1 \dots \mid_{2k} v_1 \dots v_{2l+1}$
 $\tau = v_1 \dots v_{2l+1}$

Περιττό πλήθος $(2k + 2l + 1)$ αντιμεταθέσεων
 Συνεπώς $\sigma \cdot \tau \rightarrow \text{περιττή}$

③ Παρόμοια, αν $\sigma: \text{περιττή} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \sigma\tau: \text{περιττή} \\ \tau: \text{άρτια} \end{array} \right.$

④ $\sigma, \tau: \text{περιττές} \Rightarrow \sigma = \mid_1 \dots \mid_{2k+1} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \sigma\tau = \mid_1 \dots \mid_{2k+1} v_1 \dots v_{2l+1} \\ \tau = v_1 \dots v_{2l+1} \end{array} \right.$

Άρτιο πλήθος αντιμεταθέσεων $(2k+1 + 2l+1)$, συνεπώς $\sigma\tau: \text{άρτια}$

Από την παρακάτω ανάλυση $\Rightarrow$

$$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau), \forall \sigma, \tau \in S_n$$

Αν $n \geq 2$, τότε η $\varepsilon: S_n \rightarrow \{1, -1\}$ είναι επιφορτιστός
 διότι $\varepsilon(12) = -1$ και $\varepsilon(i) = 1$

Πρόταση: $\forall n \geq 1$. $A_n \trianglelefteq S_n$ και $[S_n: A_n] = 2$, αν $n \geq 2$

και $[S_n: A_n] = 1$, αν $n = 1$

Απόδειξη: $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\} = \ker(\varepsilon) \trianglelefteq S_n$

Επιπλέον $S_n/A_n \simeq \{1, -1\} \Rightarrow |S_n/A_n| = [S_n: A_n] = 2$

Αν $n = 1$, τότε: $S_1 = A_1$

Ορισμός: Η κανονική υποομάδα A_n της S_n καλείται η
 n -οστή εναλλάσσουσα υποομάδα της S_n

Παρατήρηση: Επειδή $\forall n \geq 2$: $[S_n: A_n] = 2 \Rightarrow |A_n| = \frac{|S_n|}{2} =$
 $= \frac{n!}{2}$

• $\underline{n=1} \rightarrow S_1 = A_1 = \{i\}$

• $\underline{n=2} \rightarrow S_2 = \{i, (12)\}$, $A_2 = \{i\}$

• $\underline{n=3} \rightarrow S_3 = \{i, (12), (23), (123), (132)\}$

$A_3 = \{i, (123), (132)\}$

NO:

Date:

• $n=4 \rightarrow A_4 = \{i, (123), (124), (134), (143), (132), (234), (243), (142), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

Διότι $|A_4| = \frac{S_4}{2} = \frac{24}{2} = 12$

Θεώρημα: Η A_n είναι απλή $\Leftrightarrow n \neq 4$

$H = \{i, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

$\forall x \in H: x^2 = i$ - Έντολα βλέπουμε ότι: $\forall x, y \in H: xy \in H$

Για παράδειγμα $(12)(34)(14)(23) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (13)(24)$

Έτσι το H περιέχει την i και είναι κλειστό στην πράξη της A_4

Άρα $H \leq A_4$ (ισόμορφη με την V_4 , ομάδα του Klein)

Θα δείξουμε ότι: $H \trianglelefteq A_4$

Αντιθέτως: $\sigma \tau \sigma^{-1} \in H, \forall \sigma \in A_4, \forall \tau \in H$

Υποθέτουμε: $\sigma(a_1 a_2 \dots a_k) \sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \dots \sigma(a_k))$

$\sigma i \sigma^{-1} = i \in H$

NO:

Date:

$$\sigma(12)(34)\sigma^{-1} = \sigma(12)\sigma^{-1}\sigma(34)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2))(\sigma(3)\sigma(4)) \in H$$

$$\rightarrow \sigma(13)(24)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(3))(\sigma(2)\sigma(4)) \in H$$

$$\rightarrow \sigma(14)(23)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(4))(\sigma(2)\sigma(3)) \in H$$

Άρα, $\sigma\tau\sigma^{-1} \in H, \forall \sigma \in A_4, \forall \tau \in H$

Οπότε, $H \trianglelefteq A_4$ και η A_4 δεν είναι αβελιανή!

$\rightarrow H \trianglelefteq A_4$ δεν περιέχει υποομάδα με τάξη 6 παρόλο που το 6 διαιρεί την τάξη της ομάδας

$(6 \nmid |A_4|)$

$\hookrightarrow$ Αντιπαράδειγμα στο αντίστροφο του Θεωρήματος Lagrange.

• Πρόβλημα: Αν K, H υποομάδες μιας ομάδας G , τότε

$$\left. \begin{array}{l} K \trianglelefteq H \\ H \trianglelefteq G \end{array} \right\} \not\Rightarrow K \trianglelefteq G. \text{ Έστω } G = A_4,$$

$$H = \{i, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \trianglelefteq A_4$$

$$\text{και } K = \langle (12)(34) \rangle = \{i, (12)(34)\} \trianglelefteq H$$

$$\text{Όσο: } K \not\trianglelefteq A_4$$

$$\text{Θέτουμε } \sigma = (123) \in A_4, \tau = (12)(34) \in K$$

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = \sigma(12)(34)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2))(\sigma(3)\sigma(4)) =$$

$$= (23)(14) \notin K$$

• Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΑΚΤΥΛΙΟΥ

Έστω R ένα σύνολο το οποίο είναι εφοδιασμένο με δύο διμερείς πράξεις: $+, \cdot : R \times R \rightarrow R$

$\begin{cases} (x, y) \mapsto x+y & \rightarrow \text{Πρόσθεση} \\ (x, y) \mapsto x \cdot y & \rightarrow \text{Πολλαπλασιασμός} \end{cases}$

Ορισμός: Η τριάδα $(R, +, \cdot)$ καλείται δακτύλιος $(\Rightarrow)$

① Το ζεύγος $(R, +)$ είναι μια (προσθετική) αβελιανή ομάδα.

Αναλυτικότερα: i) $x + (y + z) = (x + y) + z$, ii) $x + y = y + x$

iii) $\exists 0 \in R: x + 0 = x = 0 + x$, iv) $\forall x \in R, \exists -x: x + (-x) = 0 = (-x) + x$

② $x(yz) = (xy)z$, $\forall x, y, z \in R$

③ $x(y+z) = xy + xz$ ($\forall x, y, z \in R$)

$(x+y)z = xz + yz$ | Επιμεριστική ιδιότητα της πρόσθεσης
ως προς τον πολλαπλασιασμό

Ο δακτύλιος $(R, +, \cdot)$ καλείται δακτύλιος με μονάδα αν-ν: υπάρχει ουδέτερο στοιχείο ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού.

$\exists 1 = 1_R \in R: x \cdot 1_R = x = 1_R x$

NO:

Date:

Ο δακτύλιος $(R, +, \cdot)$ καλείται μεταθετικός $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in R: xy = yx$$

Παράδειγμα: ① Η τριάδα $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα

• $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$: μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα

• $(\mathbb{R}, +, \cdot)$: —————

• $(\mathbb{C}, +, \cdot)$: —————

Οι πράξεις $+, \cdot$ είναι οι συνήθεις πράξεις

② Η τριάδα $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ είναι μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα $([1]_n)$, όπου:

$$[a]_n + [b]_n = [a+b]_n, \quad [a]_n \cdot [b]_n = [a \cdot b]_n$$

③ Θεωρούμε το σύνολο $(M_n(K), +, \cdot)$ όπου $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ και $+, \cdot$: συνήθεις πράξεις πρόσθεσης, πολλαπλάστων πινάκων

Τότε η τριάδα $(M_n(K), +, \cdot)$: δακτύλιος με μονάδα

Δεν είναι μεταθετικός, αν $n > 1$

$$⑦ F(R, R) = \{f: R \rightarrow R \mid f: \text{συνάρτηση}\}$$

$$\forall f, g \in F(R, R): f+g, fg \in F(R, R), \text{όπου}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), (fg)(x) = f(x)g(x)$$

Τότε, η τριάδα $(F(R, R), +, \cdot)$: μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα

⑧ Έστω $(R, +, \cdot)$: μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα

{Υπενθύμιση: Ακολουθία στοιχείων του συνόλου X είναι μια συνάρτηση $\varphi: \mathbb{N}_{\geq 0} \rightarrow X$ και συνήθως ταυτίζουμε τη φ με τις τιμές της στο X , δηλαδή γράφουμε $\varphi(0) = a_0, \varphi(1) = a_1, \dots, (\varphi(n))_{n \geq 0}$

$$A(R) = \{(\varphi(n))_{n \geq 0} \mid \varphi(n) \in R, n \geq 0\} \rightarrow \text{Σύνολο των ακολουθιών στοιχείων του } R$$

$$+: A(R) \times A(R) \rightarrow A(R): (\varphi(n))_{n \geq 0} + (\psi(n))_{n \geq 0} = (\chi(n))_{n \geq 0}$$

όπου $\chi_n = \varphi_n + \psi_n, \forall n \geq 0$

$$\cdot: A(R) \times A(R) \rightarrow A(R): (\varphi(n))_{n \geq 0} (\psi(n))_{n \geq 0} = (\chi(n))_{n \geq 0}, \text{όπου}$$

$$\chi_n = \varphi_0 \psi_n + \varphi_1 \psi_{n-1} + \varphi_2 \psi_{n-2} + \dots + \varphi_{n-1} \psi_1 + \varphi_n \psi_0$$

• Πρόταση: Η τριάδα $(A(R), +, \cdot)$ είναι μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα.

Καλείται δακτύλιος των τμηκών συναρτήσεων υπεράνω του R .

$$(\varphi(n))_{n \geq 0} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n x^n$$